

CHƯƠNG I: HÀM SỐ**1. Tóm tắt lý thuyết**

- 1.1. Định nghĩa: $y = f(x)$: Đặt tương ứng số thực x với 1 và chỉ 1 số thực y thông qua quy tắc f
- 1.2. Miền xác định: $D = \{\text{các giá trị } x \text{ đảm bảo biểu thức của } f(x) \text{ có nghĩa}\}$
- 1.3. Miền giá trị: $G = \{\text{các giá trị của } y \text{ có được từ } x \text{ thông qua quy tắc } f(x)\}$
- 1.4. Tính đơn điệu, bị chặn trên, bị chặn dưới, bị chặn
- 1.5. Hàm ngược: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x)$ đơn điệu

2. Bài tập

- 2.1. Tìm MXĐ: $y = \ln[\ln(1-x)]$; $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x^3+1}{3x-1}}$; $y = \sqrt{1-\ln(2e-e^{2x})}$
- 2.2. Hàm số sau có hàm ngược không: $y = x^2 + \ln x$; $y = x^3 + 3x + 4$; $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

CHƯƠNG I: GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ**1. Tóm tắt lý thuyết****1.1. Giới hạn**

Kí hiệu: $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$; $L = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

Các phép toán: nếu có $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$; $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = n$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \pm n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \cdot n$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{m}{n} \quad (n \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = m^n \quad (m > 0)$$

Giới hạn một số hàm cơ bản:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty \quad (a > 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arccos x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0 \quad (0 < a < 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\pi/2} \cot x = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \arcsin x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$$

Không tồn tại giới hạn $x \rightarrow \infty$ của các hàm số: $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$

Giới hạn vô định cơ bản

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$u = u(x) \rightarrow 0 \text{ khi } x \rightarrow 0 \text{ thì: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

Một số cách tính giới hạn thông dụng

(*) Dùng vô cùng bé tương đương: $\sin x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $(e^x - 1) \sim x$; $\tan x \sim x$; $\arcsin x \sim x$

$$(*) \text{ Lopitan: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

$$(*) \text{ Định lý kẹp: } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ và } g(x) \text{ bị chặn (hay } |g(x)| < M) \text{ thì } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$$

1.2. Hàm số liên tục

Với $f(x)$ xác định trên D , xét $x_0 \in D$:

$$(*) f(x) \text{ liên tục tại } x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \end{cases}$$

$$(*) f(x) \text{ liên tục trên } D \Leftrightarrow f(x) \text{ liên tục tại mọi điểm } x_0 \in D$$

2. Bài tập

2.1. Bài tập giới hạn

Thay VCB tương đương	$L_1 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(2x^2 - 4x - 6)}{\ln(x^3 - 26)}$	$L_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$	$L_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$
	$L_4 = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(1 + \tan^2 x)}$	$L_5 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(3x^2 - 2x - 8)}{\tan(4 - x^2)}$	$L_6 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x \tan x)}{x^2 + \sin^3 x}$
Ứng dụng đạo hàm	$L_7 = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x \cdot \ln(1+x)]$	$L_8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{3x} - \cot 3x \right)$	$L_9 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^5 \sin x}$
	$L_{10} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$	$L_{11} = \lim_{x \rightarrow 3^-} [\sin(\pi x) \ln(3-x)]$	$L_{12} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5\sqrt[3]{2+8x^3}}{x + \sqrt{1-x+3x^2}}$
	$L_{13} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{1-\cos 3x} \sqrt{\sin t} dt}{x^2 \int_0^x \ln(\cos 2t) dt}$	$L_{14} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan 3x) - 3x^2}{e^{-2x} - 1 + \tan(-2x)}$	$L_{15} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(2 - \cos^2 t) dt}{\int_x^0 (e^{t^2} - 1) dt}$
Kẹp	$L_{16} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x+1} - \cos x}{\sqrt{x^3 - 4x + 8}}$	$L_{17} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$	$L_{18} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \sin 5x}{e^{2x}}$
Lũy thừa mũ	$L_{19} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 2^2)^{\frac{1}{x}}$	$L_{20} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x} - \cos x)^{\frac{5}{x}}$	$L_{21} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \cot x)^{\frac{3}{x^2}}$
	$L_{22} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan 3x)^{2x^3 - x}$	$L_{23} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	$L_{24} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3^x)^{\frac{7}{x}}$
Nhân liên hợp	$L_{25} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x)$	$L_{26} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 5x \sin^2 x} - 1}{\tan(-x) \ln(\cos 3x)}$	$L_{27} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1) \sqrt{\frac{4x+1}{x^3 + x}}$

2.2. Bài tập về sự liên tục của hàm số

(1) $f(x) = \begin{cases} (1-x^4) \cos \frac{\pi}{x-1} & ; x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$	(2) $f(x) = \begin{cases} (1 + \sin^2 x)^{\frac{2}{x^2}} & ; x \neq 0 \\ e^3 & ; x = 0 \end{cases}$
---	---

	$(3) y = \begin{cases} \sqrt[3]{1-x} \sin \frac{3}{x-1}; & x \neq 1 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$	$(4) f(x) = \frac{x+2}{1+e^{\frac{1}{2-x}}}$
Tìm a để hàm số liên tục	$(5) y = \begin{cases} (1+4x^2)^{\frac{1}{1-\cos 2x}}; & x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$	$(6) y = \begin{cases} (4-x^2) \sin \frac{x}{x-2}; & x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$
	$(7) f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{(x-3)^6} \arctan \frac{1}{x-3}; & x \neq 3 \\ a & ; x = 3 \end{cases}$	

CHƯƠNG II: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM SỐ

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Định nghĩa đạo hàm: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

1.2. Ký hiệu đạo hàm của $y = f(x)$: $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$; $y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}, \dots$

1.3. Công thức đạo hàm hàm số cơ bản

1.4. Đạo hàm theo quy tắc

Nếu có $u = u(x)$; $v = v(x)$ sao cho tồn tại $u'(x)$; $v'(x)$ thì:

Với C là hằng số

$$C' = 0 \quad (Cu)' = Cu' \quad (u \pm v)' = u' \pm v' \quad (uv)' = u'v + v'u \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

1.5. Đạo hàm của hàm hợp

Nếu có hàm số của biến u là $f(u)$, trong đó u là hàm số của x, tức là $u = u(x)$ thì:

$$f'_x = \frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot u'(x)$$

1.6. Khai triển Taylor, Mac Laurin

$$\text{Taylor: } f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r(x)$$

$$r(x) = o\left[(x-x_0)^n\right] \text{ hoặc } r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ với } c \text{ nằm giữa } x \text{ và } x_0$$

$$\text{Mac Laurin: } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x)$$

$$r(x) = o(x^n) \text{ hoặc } r(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \text{ với } c \text{ nằm giữa } x \text{ và } 0$$

1.7. Vi phân

Xét $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 (còn gọi là khả vi tại x_0). Khi đó:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$$

Vi phân của hàm $f(x)$ tại điểm x_0 là: $df(x_0) = (x - x_0)f'(x_0)$.

$$\Delta x = x - x_0; \Delta f(x) = f(x) - f(x_0) \text{ thì: } df(x_0) = \Delta x \cdot f'(x_0) \text{ và } \Delta y = \Delta f(x) = \Delta x \cdot f'(x_0) + o(\Delta x)$$

Tổng quát ta có:

$$dy = df(x) = \Delta x \cdot f'(x)$$

$\Delta y = dy + o(\Delta x) \approx dy$ điều này giúp ta tính toán xấp xỉ

2. Bài tập

2.1. Đạo hàm

Dùng định nghĩa tìm công thức đạo hàm của: $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$; $\arcsin x$; a^x ; $\ln x$; $\log_a x$		
Dùng định nghĩa tính đạo hàm các hàm số sau		
$a, y = f(x) = 2 x+1 - x-2 $	$b, y = x-1 \sin^2(x^2+1)$	$c, f(x) = x-4 \ln^3(5x^2+9)$
$d, y = \begin{cases} \sqrt[4]{(x+1)^5} \cos \frac{1}{x+1}; & x \neq -1 \\ 0 & ; x = -1 \end{cases}$	$e, y = \begin{cases} \sqrt[5]{(x-2)^6} \arctan \frac{1}{2-x}; & x \neq 2 \\ 0 & ; x = 2 \end{cases}$	$y = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-3)^2} \sin \frac{1}{3-x}; & x \neq 3 \\ 0 & ; x = 3 \end{cases}$
Chứng minh hàm số sau liên tục nhưng không có đạo hàm tại x_0		
$a, f(x) = \frac{ x }{ x-1 +1}, x_0 = 1$	$b, y = \sqrt[3]{x-1} \arctan(x-1), x_0 = 1$	$c, f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{3}{ x }; & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}; & x = 0 \end{cases}$
Chứng minh các hàm số có hàm ngược và tính		
$a, y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ Tính $f^{-1}(2)$	$b, y = f(x) = 2x - \cos x$; Tính $f^{-1}(\pi)$	$c, y = f(x) = 2x^2 + \ln x$ Tính $f^{-1}(2)$
$d, y = f(x) = 1 - 2x - x^3$ Tính $(f^{-1})'(4)$	$e, y = f(x) = 3x - 3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ Tính $(f^{-1})'(\pi)$	$f, y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ Tính $(f^{-1})'(2)$
Tìm khoảng tăng giảm và cực trị hàm		
(1) $y = \sqrt[3]{2-3x^2} \cdot \sqrt[3]{(5+x)^2}$	(2) $f(x) = e^{-3x}(4x+1)$	(3) $f(x) = e^x - \int_2^x e^t \sqrt{t-1} dt$
(4) $y = \left(\int_1^{3x^2-2x} \sqrt{1+2t^2} dt \right)^4$	(5) $y = \frac{x^2}{2} \left(\arctan \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + (2-x) \arctan \frac{x}{2} + \ln \left(\frac{x^2}{4} + 1 \right) + \frac{\pi x}{4} - x$	
(6) $y = \left(\int_0^{x-2} e^t \sqrt[3]{2t^2+3} dt \right)^8$	(7) $y = \int_0^{3-x} \sqrt[3]{1+t^2} dt + \sqrt[3]{2}x$	(8) $y = \int_0^{x-1} \sqrt[3]{2+9t^2} dt - \sqrt[3]{3}x$
(9) $y = -2(x^2-2)\arccos \frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} - \frac{\pi}{3}x^2$		
Khai triển Taylor, Mac Laurin		

(1) $y = e^{2x} \sqrt{3x+1}$ Mac Laurin cấp 3	(2) $f(x) = \ln(1+x)^{x+1}$ Mac Laurin cấp 4
(3) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ Mac Laurin cấp 4	(4) $y = 4xe^x + x^2 + 3$, Taylor bậc 3 tại $x = 0$
(5) $y = x\sqrt{3x+1}$, Mac Laurin bậc 5	(6) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+5x+6}$, Taylor bậc 3 tại -1
(7) $y = (x+1)^3 \arcsin(x+1)$, Taylor bậc 5 tại -1	(8) $y = (x-1)^3 \arctan(x-1)$, Taylor bậc 5 tại 1
(9) $y = \frac{e^{-6x}}{x^2+15x+26}$, Mac Laurin cấp 2	(10) $y = \int_0^x e^{\sin x} dx$, Mac Laurin cấp 4

Ứng dụng phân tích kinh tế

- Một doanh nghiệp độc quyền đứng trước đường cầu $Q^D = 100 - 2p$. Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại mức giá $p = 10$ và nêu ý nghĩa.
- Hàm cầu và hàm cung của người tiêu dùng đối với một loại sản phẩm lần lượt là $Q_d = 54 - 3p$; $Q_s = 2p^2 + 10$. Tính hệ số co giãn của hàm cung và hàm cầu tại mức giá cân bằng và giải thích ý nghĩa.
- Một công ty độc quyền có hàm doanh thu $TR = 200Q - \frac{1}{6}Q^2$. Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại mức giá $p = 50$ và giải thích ý nghĩa.
- Biết hàm tổng chi phí $TC = 5000 + \frac{5Q^2}{Q+3}$, Q là sản lượng. Tính hệ số co giãn của TC theo Q tại $Q = 17$ và giải thích ý nghĩa kinh tế của kết quả nhận được.
- Ước lượng hàm sản xuất của một công ty có dạng $Q = 90L^{\frac{2}{3}} (L > 0)$. Cho biết giá sản phẩm bằng 3, giá thuê 1 đơn vị lao động bằng 2 và chi phí cố định 100 000. Xác định mức sử dụng lao động L để công ty tối đa lợi nhuận.
- Một doanh nghiệp độc quyền có hàm doanh thu biến $MR = 300 - Q$ và hàm tổng chi phí $TC = 2Q^2 + 30$. Tìm mức sản lượng mà doanh nghiệp tối đa lợi nhuận.
- Hàm cầu đối sản phẩm của một nhà độc quyền là $Q = 80 - 0,2p$. Hàm chi phí biên của nhà sản xuất tại mỗi mức sản lượng $MC = 3Q^2 - 20Q + 200$. Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại mức giá mà doanh nghiệp tối đa lợi nhuận và nêu ý nghĩa kinh tế của kết quả nhận được.
- Hàm cầu thị trường đối với sản phẩm của một hãng độc quyền có dạng $p = 1400 - 4Q$:
 - Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại $p = 80$ và nêu ý nghĩa
 - Biết hàm chi phí sản xuất của hãng là $TC = Q^3 - 7Q^2 + 80Q + 844$, hãy xác định mức sản lượng tối đa lợi nhuận

2.2. Vi phân

(1) Viết biểu thức vi phân của các hàm số sau:		
$a, y = e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x} + 1)$	$b, y = \ln \frac{(x-1)\sqrt{3x+2}}{(x-2)^3}$	$c, y = \ln \left(\tan \frac{2x+1}{4} \right)$
(2) Cho hàm số $f(x) = 3x^4 + 4x^3$. Tính $df(1)$ trong các trường hợp		
$a, \Delta x = 1$	$b, \Delta x = 0,2$	$c, \Delta x = 0,05$

CHƯƠNG III: HÀM NHIỀU BIẾN: ĐẠO HÀM RIÊNG – VI PHÂN – CỰC TRỊ

1. Tóm tắt lý thuyết**1.1. Hàm 2 biến:** $z = f(x; y)$, n biến: $w = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ **1.2. Đạo hàm riêng:** $w = f(x; y; z)$: $w'_x = \frac{\partial w}{\partial x} = f'_x(x; y) = f'_x$ Đạo hàm cấp 2, hỗn hợp cấp 2: $w''_{x^2} = w''_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$; $w''_{xy} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$; $w''_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ **1.3. Công thức định nghĩa:** $f(x; y)$ với $(x_0; y_0)$ thuộc miền xác định

Riêng cấp 1	$f'_x(x_0; y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x; y_0) - f(x_0; y_0)}{x - x_0}$	$f'_y(x_0; y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0; y) - f(x_0; y_0)}{y - y_0}$
Hỗn hợp cấp 2	$f''_{xy}(x_0; y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f'_x(x_0; y) - f'_x(x_0; y_0)}{y - y_0}$	$f''_{yx}(x_0; y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'_y(x; y_0) - f'_y(x_0; y_0)}{x - x_0}$

1.4. Vi phân toàn phần của hàm $w = w(x; y; z)$

Cấp 1	Cấp 2
$dw = w'_x dx + w'_y dy + w'_z dz$	$d^2w = w''_{x^2} dx^2 + w''_{y^2} dy^2 + w''_{z^2} dz^2 + 2w''_{xy} dx dy + 2w''_{xz} dx dz + 2w''_{yz} dy dz$

1.5. Hàm ẩn

Hàm	Phương trình xác định	Đạo hàm
$y = y(x)$	$F(x; y) = 0$	$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$; $y''(x) = [y'(x)]' = \left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)'$
$z = z(x; y)$	$F(x; y; z) = 0$	$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$; $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$; $z''_{x^2} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_x$; $z''_{xy} = \left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)'_y$

1.6. Cực trị $w = w(x; y; z)$

Cực trị tự do				
Hàm số	Điều kiện cần	Điều kiện đủ		
		Đạo hàm bậc 2	Cực đại	Cực tiểu
$w(x; y)$	$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(x_0; y_0)$	$a_{11} = w''_{x^2}$ $a_{22} = w''_{y^2}$ $a_{12} = a_{21} = w''_{xy}$	$a_{11} < 0$ $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$	$a_{11} > 0$ $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$
$w(x; y; z)$	$\begin{cases} w'_x = 0 \\ w'_y = 0 \\ w'_z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(x_0; y_0; z_0)$	$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $a_{11} = w''_{x^2}; a_{12} = w''_{xy}; \dots$	$D_1 < 0; D_2 > 0;$ $D_3 < 0$ $(-1)^k D_k > 0$ $k = 1, 2, 3$	$D_1 > 0; D_2 > 0;$ $D_3 > 0$ $D_k > 0$ $k = 1, 2, 3$

Cực trị với điều kiện				
Hàm số	(*)Hàm Lagrange - (*)Điều kiện cần	Điều kiện đủ		
		Đạo hàm bậc 2	Cực đại	Cực tiểu
$w(x; y)$ $g(x; y) = b$	$(*)L = w(x; y) + \lambda [b - g(x; y)]$ $(*) \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \Leftrightarrow M(x_0; y_0) \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$ với $\lambda = \lambda_0$	$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$ $g_1 = g'_x; g_2 = g'_y$ $L_{11} = L''_{x^2}; L_{12} = L''_{xy}$	$ \overline{H} > 0$	$ \overline{H} < 0$

2. Bài tập

2.1. Đạo hàm riêng

Dạng 1	(1) $w = (x^2 + 2y^2)f(x^2 - y^2)$	(2) $w = (x^2 + y^2)f\left(\frac{3y}{x-y}\right) - x^2g\left(\frac{x}{4y}\right)$
	(3) Cho $f(x)$ khả vi tại mọi x và $f^{-1}(-1) = 1; f''(-1) = 0$. Xét hàm số $w = (2x + 3y)f(x^2 - y^2)$. Hãy tính đạo hàm riêng cấp 2: $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0; -1)$	
	(4) $w = e^{-3x^2y}(5zx^3 + 2y^2x)$. Tính $w(-1; 2; 0)$	(5) $u = f\left(\frac{x}{y}; \tan \frac{y}{x}\right)$ cmr: $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
	(6) Cho $f(u; v)$ thỏa mãn $f(1; 0) = f'_u(1; 0) = 2; f'_v(1; 0) = -1$ và $w = x\sqrt{y} \cdot f\left(\frac{y}{x}; \sin \frac{y-x}{2x+y}\right)$. Tính: $w'_x(2; 2)$	
Dạng 2	(1) $f(x; y) = \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{y-2}$. Tính $f'_y(1; 3)$	(2) $f(x; y) = y^2 \sqrt[3]{3-x}$. Tính $f'_x(2; 1)$
	(3) $w = \begin{cases} x\sqrt{y^2+2} \arctan \frac{2y-1}{x}; & (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \\ 0 & ; (x; y) \in \mathbb{R}^2; x = 0 \end{cases}$. Tính $f'_x(0; 3); f'_y(0; 3)$	
	(4) $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy - y^3}{x^2 + y^2}; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x = y = 0 \end{cases}$ Tính $f'_x(0; 0), f'_y(0; 0)$	(5) $f(x) = \begin{cases} \frac{xy(2x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x = y = 0 \end{cases}$ Tính $f''_{xy}(0; 0)$
	(6) $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^3 + xy - y^3}{x^2 + y^2}; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x = y = 0 \end{cases}$ Tính $f'_x(x; y)$	(7) $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2y^3}{2y^2 + 3x^2}; & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & ; x = y = 0 \end{cases}$ Tính $f''_{xy}(x; y)$

2.2. Vi phân toàn phần

Viết biểu thức vi phân toàn phần của các hàm số sau

1) $z = (5x^2 + 7)^{-3x+2y}$ 2) $w = (y^2 + 3 \operatorname{arccot} x)^y$ 3) $w = \left(\frac{5x^2 + 5z^3}{2y^4} \right)^{\sin y}$

4) $z = z(x; y)$ xác định bởi $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y} + 1$	5) $z = z(x; y)$ xác định bởi $z = e^y \sin \frac{x}{z} + 2y$
6) Biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của $F(x; y) = 4 + 3y - 8x + 4x^2 + y^2$	
7) Biểu thức vi phân toàn phần cấp 2 của $z = z(x; y)$ xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 - x + y - 4z - \frac{9}{2} = 0$	

2.3. Cực trị

Cực trị tự do	
$a, u = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xz + 6x + 8y - 15$	$b, w = -3x^2 - 3y^2 - 11z^2 + 6xz - 12x + 12y + 20z - 1$
$c, w = 4x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy + 12y - 15z + 4$	$d, u = -x^2 - 4y^2 - 9z^2 - 4yz + 6x + 8z + 5$
$e, z = \frac{1}{8}y^4 - 8xy + 4x^2 + 13$	$f, z = \frac{1}{3}y^4 - 12xy + 6x^2 + 11$
$g, z = z(x; y) (z \geq 1)$ xác định bởi: $x^2 + 3y^2 + z^3 - 2x - 12y - 2z + 14 = 0$	$h, z = z(x; y) (z > 1)$ xác định bởi phương trình: $x^2 + 3y^2 + z^3 - 2x - 12y - 15z + 27 = 0$
Cực trị kèm điều kiện	
1) $w = x^{0.5}y^{0.3}$ điều kiện $5x + 2y = 656$	2) $w = x^{0.8}y^{0.6}$ điều kiện $8x + 5y = 280$
3) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ điều kiện $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{9}$	4) $z = 2x^2 + y^2 + 2xy - 3x + 4y$; $x^2 = y + 3$

2.4. Ứng dụng phân tích kinh tế

Hàm sản xuất	<p>1. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = 8\sqrt[3]{K}\sqrt{L}$.</p> <p>a. Đánh giá hiệu quả theo quy mô của doanh nghiệp</p> <p>b. Hãy tính sản phẩm hiện vật cận biên của tư bản và lao động tại mức $L = 16; K = 8$ và giải thích ý nghĩa.</p> <p>2. Cho hàm sản xuất $Q = 65K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$</p> <p>a. Tính sản phẩm hiện vật cận biên theo vốn và lao động tại mức $K = 64, L = 125$ và cho biết ý nghĩa kinh tế.</p> <p>b. Nếu giá một đơn vị tư bản K là 16\$ và giá một đơn vị lao động L là 7\$ và doanh nghiệp sử dụng các yếu tố đầu vào ở mức $k = 64, L = 125$ thì doanh nghiệp nên sử dụng thêm một đơn vị tư bản hay một đơn vị lao động mỗi ngày? Vì sao?</p>
Cực trị tự do	<p>1. Giả sử hàm tổng chi phí của doanh nghiệp cạnh tranh là: $TC = 7Q_1^2 + 2Q_2^2 + 5Q_1Q_2$. Biết giá các sản phẩm tương ứng là $p_1 = 65, p_2 = 45$. Hãy xác định các mức sản lượng cho lợi nhuận tối đa.</p> <p>2. Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất kết hợp hai loại sản phẩm với hàm tổng chi phí: $TC = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 40$. Cầu của thị trường đối với sản phẩm như sau $Q_1 = 35 - 0,5p_1$; $Q_2 = 40 - p_2$. Hãy chọn mức sản lượng kết hợp và giá bán cho lợi nhuận tối đa. Tại điểm tối đa hóa lợi nhuận, nếu giá sản phẩm 1 tăng 3% thì cầu sản phẩm đó thay đổi như thế nào?</p> <p>3. Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy sản xuất kết hợp 3 loại sản phẩm với hàm tổng chi phí kết hợp $TC = \frac{3}{2}Q_1^2 + 2Q_2^2 + Q_3^2 + Q_1Q_3 + 2Q_2Q_3$. Hãy chọn kết hợp sản lượng cho lợi nhuận tối đa khi giá các sản phẩm là $p_1 = 20\\$; p_2 = 28\\$; p_3 = 26\\$.</p> <p>4. Một công ty độc quyền sản xuất một loại sản phẩm và bán tại hai thị trường khác nhau (Được phép phân biệt giá). Cho biết hàm chi phí cận biên:</p>

	$MC = 3,5 + 0,1Q ; (Q = Q_1 + Q_2)$ Và cầu của các thị trường đối với sản phẩm: $p_1 = 24 - 0,3Q_1$ và $p_2 = 18 - 0,15Q_2$. Xác định giá bán trên mỗi thị trường để công ty thu lợi nhuận tối đa
Cực trị điều kiện	1. Cho hàm lợi ích của hộ gia đình khi tiêu dùng 2 loại hàng hoá $U = 10x^{0,6}y^{0,4}$ trong đó x là lượng hàng hoá thứ nhất, y là lượng hàng hoá thứ 2. Trong điều kiện giá của hàng hoá thứ nhất là 10\$, giá của hàng hoá thứ 2 là 3\$ và thu nhập dành cho tiêu dùng là 3000\$. Hãy xác định cơ cấu tiêu dùng tối đa hoá lợi ích và xác định mức lợi ích tối ưu tăng thêm khi lượng tiền dành cho tiêu dùng tăng 1\$ (và khi tăng 1%). 2. Cho hàm lợi ích $U = 20x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$ với x,y lần lượt là lượng cầu của hàng hóa 1 và 2. Biết giá mỗi đơn vị hàng hóa lần lượt là \$8 và \$4. Hãy tìm lượng cần x,y để người tiêu dùng tối thiểu hóa chi tiêu của mình với lợi ích không đổi là 400. 3. Giả sử một doanh nghiệp có hàm sản xuất là $Q = 120K^{0,7}L^{0,4}$. Sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange, tìm mức sử dụng các yếu tố đầu vào của sản xuất sao cho doanh nghiệp phải bỏ ra chi phí nhỏ nhất khi sản xuất $Q_0 = 4000$ đơn vị sản phẩm. Cho biết giá thuê tư bản và lao động lần lượt là $w_K = 16$; $w_L = 14$. 4. Một doanh nghiệp có hàm sản xuất $Q = 20K^{0,4}L^{0,4}$. Giả sử giá thuê một đơn vị tư bản là \$10, giá thuê một đơn vị lao động là \$8 và doanh nghiệp tiến hành sản xuất với ngân sách cố định là \$320. Tìm mức sử dụng lao động và tư bản để doanh nghiệp có sản lượng cực đại. Khi ngân sách sản xuất tăng 3% thì sản lượng cực đại thay đổi như thế nào?

CHƯƠNG IV: TÍCH PHÂN

1. Tóm tắt lý thuyết

1.1. Tích phân: $\int f(x)dx ; \int_a^b f(x)dx$

1.2. Hàm cận trên: nếu có $f(x) = F'(x)$ thì: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$; với $u = u(x)$ thì $F(u) = \int_a^{u(x)} f(t)dt$

1.3. Định lý giá trị trung bình: $\int_a^b f(x)dx = f'(c)(b-a)$ trong đó c là 1 giá trị nào đó nằm giữa a, b

1.4. Bảng nguyên hàm

1. $\int kdx = kx + C$	$u = u(x); du = u'dx$
2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$
8. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$	$\int \tan u du = -\ln \cos u + C$

9. $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$	$\int \cot u du = \ln \sin u + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+b}} = \ln x+\sqrt{x^2+b} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+b}} = \ln u+\sqrt{u^2+b} + C$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$	$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C$

1.5. Các dạng tích phân thông dụng

Công thức tích phân từng phần:

Đặc điểm	Bất định	Xác định
$u = P(x)$ là đa thức $v = \{\sin ax; \cos ax; e^{ax}; \ln ax; \arctan ax\}$	$\int u dv = uv - \int v du$	$\int_a^b u dv = uv \Big _a^b - \int_a^b v du$

Đổi biến: $t = \{\sqrt{ax+b}; \sqrt[3]{ax+b}; \dots\}$ Công thức thế cận: $F'(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

1.6. Tích phân suy rộng, hội tụ, phân kì

2. Bài tập

Phân thức	1) $\int \frac{dx}{4x^2 - 5x + 1}$	2) $\int \frac{dx}{-5 + 4x - x^2}$	3) $\int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 5x^2 + 6}$
Lượng giác	1) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$	2) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$	3) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 3}$
Căn thức	1) $\int \frac{dx}{2\sqrt{1+6x}(1+3x)}$ 4) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+x^2} dx$	2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ 5) $\int \frac{2x + \sqrt{4-x^2}}{x^2} dx$	3) $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x + 5}}$ 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^4 - 1}}$
Từng phần	a, $\int (7x-1)e^{3x+1} dx$ d, $\int \frac{\ln(2x+5)}{x^2} dx$	b, $\int (3x-1)\cos(-3x) dx$ e, $\int \frac{\arctan x}{x^2} dx$	c, $\int e^{-3x} \sin 2x dx$ f, $\int \left(4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}\right) e^x dx$
Suy rộng Tính và cho biết các tích phân sau hội tụ hay phân kì	1) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 5x + 1}}$ 4) $\int_{-\infty}^0 x^2 e^{\frac{x}{3}} dx$ 7) $\int_{-\infty}^0 e^{-2x} \cos 2x dx$	2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{4x^4 - 20x^2 + 26}$ 5) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{4\sqrt{x+1}(2+x)}$ 8) $\int_0^{+\infty} (3x+2)\sin 5x dx$	3) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 3x^2 - 4}$ 6) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos 2x dx$ 9) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(5x-2)}{x^2} dx$

CHƯƠNG V: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN**1. Tóm tắt lý thuyết**1.1. Phương trình vi phân : $F(x; y; y'; y''; dy; dx) = 0$

1.2. Nghiệm tổng quát và tích phân tổng quát

 $y = y(x) + C \Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (Rút được y theo x) $\Phi(x; y) = C \Rightarrow$ Tích phân tổng quát của phương trình vi phân (Không rút được y theo x)

1.3. Một số dạng phương trình vi phân cấp 1 có thể giải được

Phương trình	Dạng	Cách xử lý
Phân ly biến	$f(x)dx = g(y)dy$	Lấy tích phân 2 vế
Đưa về phân ly	$\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$	Đặt $z = ax + by \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b \frac{dy}{dx}$
	$\frac{dy}{dx} = f(x; y) = f\left(1; \frac{y}{x}\right)$	Đặt $y = zx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$
Vi phân toàn phần	$M(x; y)dx + N(x; y)dy = 0$	$M'_y \equiv N'_x$ Tích phân tổng quát: $\Phi(x; y) = C$ với: $\Phi(x; y) = \int_{x_0}^x M(x; y_0)dx + \int_{y_0}^y N(x_0; y)dy$ $= \int_{x_0}^x M(x; y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0; y)dy$
Thừa số tích phân		$\frac{M'_y - N'_x}{N} = f(x) \Rightarrow p(x) = e^{\int f(x)dx}$ $\frac{M'_y - N'_x}{M} = f(y) \Rightarrow p(y) = e^{-\int f(y)dy}$
Tuyến tính	$y' + p(x)y = q(x)$	Biến thiên hằng số
Bernoulli	$y' + p(x)y = y^\alpha q(x) (\alpha \neq 1)$	Đưa về tuyến tính bằng cách: $\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ Rồi đặt $z = z(x) = y^{1-\alpha}$

2. Bài tập

Phân ly biến (tách biến)		
1) $\frac{xy'}{y} = \frac{-1}{\sqrt{2x+3}}$	2) $y' - 3x^2y = 4x^2y^3$	3) $(x^2 - 3x + 2)y' + 2y = y(x+1)$
Đưa về phân ly biến		
$a, y' = \sin(2x - y)$	$b, y' = \sqrt{4x + 2y}$	$c, (-2x + 6y + 3)dx - (x - 3y + 1)dy = 0$
$d, \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2y}$	$e, \frac{dy}{dx} = (8x + 2y + 1)^2$	$f, (x^2 - 6xy)y' + 3y^2 = 5x^2 + 2xy$
$g, (3x + y)dx - (x + 2y)dy = 0$	$h, (4y - 6x + 3)dx - (3x - 2y + 4)dy = 0$	
Phương trình vi phân toàn phần		

$$\begin{aligned}
 &1, (xy^2 - x^2y + 2)dx + \left(x^2y - \frac{x^3}{3} + y^2 + 5\right)dy = 0 \quad 2, \left(2xy - \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(x^2 + \frac{2x}{y^3}\right)dy = 0 \\
 &3, \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0 \quad 4, 2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0 \text{ thỏa } y=1; x=0 \\
 &5, [y + 2(x+y)\ln(x+y)]dx + [x + 2(x+y)\ln(x+y)]dy = 0
 \end{aligned}$$

Thừa số tích phân

$$\begin{aligned}
 &1, ydx = (x + y^2)dy \quad 2, (3x+1)y' = 4x+5y \quad 3, \left(2x + \frac{y^2}{2} + 3x^3\right)dx - (xy + y)dy = 0 \\
 &4, 2xydx - (y + x^2)dy = 0 \quad 5, \frac{dy}{dx} = \frac{1+xy}{x+1} \quad 6, y^2 \cos xy dx + [y + xy \cos xy]dy = 0
 \end{aligned}$$

Phương trình tuyến tính

$$\begin{aligned}
 &1) y' - \frac{y}{x-1} = (x^2 + x - 2)\ln 3x \quad 2) xy' - y = x^2 e^x \quad 3) x \frac{dy}{dx} + (2-x)y = (x+x^2)e^{-x} \\
 &4) y' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \quad 5) y' - y = \frac{(2-x)}{x^3}e^x \quad 6) (x^2 - 3x + 2)y' + 2y = y(x+1) \\
 &7) (3x+1)y' = 4x+5y \quad 8) \frac{dy}{dx} = \frac{1+xy}{x+1} \quad 9) y' - \frac{2x+6}{x^2+6x+13}y = 2x+7
 \end{aligned}$$

Phương trình Bernoulli

$$\begin{aligned}
 &1) y \cdot y' - 7xy^2 = 2x \quad 2) y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^5 \ln x}{x} \quad 3) y' - 3x^2y = 4x^2y^3 \\
 &4) y' - y^2e^x + 2y = 0 \quad 5) 3y^2y' + y^3 + x = 0 \quad 6) xy' + y = x^3y^4 \\
 &7) \frac{dy}{dx} + 3y \tan 3x = y^2(2x+5)\cos 3x \quad 8) (3y^2 - x^2)dx - (y - 6xy)dy = 0 \\
 &9) \frac{dy}{dx} - 4y \tan 2x(4 + \cos 2x)
 \end{aligned}$$